Leggi logiche

Diamo adesso un elenco delle più importanti leggi logiche e quindi, nel caso di leggi condizionali, anche un elenco delle più importanti regole valide, cioè regole che permettono di inferire, o dedurre, tautologie da tautologie

1. I tre principi della logica aristotelica

a. principio di identità, la cui espressione formale è

$$P \rightarrow P \quad \text{(versione debole)}$$

$$P \leftrightarrow P \quad \text{(versione forte)}$$

b. principio di (non) contraddizione, la cui espressione formale è

$$\neg(P \wedge \neg P)$$

c. principio del terzo escluso, la cui espressione formale è

$$P \vee \neg P$$

Ricordando come ogni connettivo possa essere definito a partire dagli altri, si può facilmente osservare che i tre principi non sono altro che tre modi diversi per scrivere la medesima cosa. In effetti, rammentando come l'implicazione materiale sia definita tramite i connettivi di negazione e congiunzione, si ha che $(P \rightarrow P) \leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg P))$; oppure rammentando come l'implicazione materiale sia definita tramite i connettivi di negazione e somma, si ha che $(P \rightarrow P) \leftrightarrow (P \vee \neg P)$.

2. *Legge della doppia negazione*

$$\neg\neg P \leftrightarrow P$$

3. *Legge dell'idempotenza*

$$P \wedge P \leftrightarrow P$$

$$P \vee P \leftrightarrow P$$

4. *Leggi di inferenza stoiche* (i nomi sono medievali)

$(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$	da cui segue la regola detta	*modus ponendo ponens*
$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$	da cui segue la regola detta	*modus tollendo tollens*
$\neg(P \wedge Q) \wedge P \rightarrow \neg Q$	da cui segue la regola detta	*modus ponendo tollens* 1
$\neg(P \leftrightarrow Q) \wedge P \rightarrow \neg Q$	da cui segue la regola detta	*modus ponendo tollens* 2
$\neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow P$	da cui segue la regola detta	*modus tollendo ponens*

Si noti che il *modus ponendo ponens* (noto semplicemente come *modus ponens*, da '*ponere*', cioè 'affermare') è la regola di inferenza più importante della logica classica in quanto praticamente su di essa si basa la possibilità della deduzione. Il *modus ponens* non deve però essere erroneamente confuso con quell'errore di ragionamento chiamato *fallacia* *dell'affermazione del conseguente*, secondo cui $((P\rightarrow Q)\wedge Q)\rightarrow P$. Infatti, per la tavola di verità dell'implicazione materiale, la verità del conseguente non è vincolata dalla verità dell'antecedente.

Il *modus tollendo tollens* (noto semplicemente come *modus tollens*, da '*tollere*', cioè 'rifiutare') è la regola di inferenza attorno cui ruota il falsificazionismo di K.R. Popper e qualunque rapporto epistemologico fra la teoria scientifica e un esperimento che la contraddica.

Infatti, se T è una teoria scientifica e c è una sua conseguenza empiricamente controllabile, se l'esperimento dice che c non si dà (ovvero $\neg c$), allora la teoria non si dà (dal punto di vista strettamente logico). Cioè: $((T\rightarrow c)\wedge\neg c)\rightarrow\neg T$.

Analogamente al caso precedente, il *modus tollens* non deve essere confuso con quell'errore di ragionamento chiamato *fallacia della negazione dell'antecedente*, secondo cui $((P\rightarrow Q)\wedge\neg P)\rightarrow\neg Q$. Infatti, la falsità del conseguente non è vincolata dalla falsità dell'antecedente.

5. *Leggi della semplificazione*

$$P\wedge Q\rightarrow P$$
$$P\wedge Q\rightarrow Q$$

6. *Leggi dell'addizione*

$$P\rightarrow P\vee Q$$
$$Q\rightarrow P\vee Q$$

7. *Paradossi dell'implicazione materiale*

ex falso sequitur quodlibet (un enunciato falso implica materialmente un qualunque enunciato: un'implicazione materiale è vera se il suo antecedente è falso)	$\neg P\rightarrow(P\rightarrow Q)$
verum sequitur ad quodlibet (un enunciato vero è implicato materialmente da un qualunque enunciato: un'implicazione materiale è vera se il suo conseguente è vero)	$Q\rightarrow(P\rightarrow Q)$
ex vero numquam sequitur falsum (un enunciato vero non implica materialmente mai un enunciato falso)	$(P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg(P\rightarrow Q)$
ex absurdis sequitur falsum (legge dello Pseudo-Scoto; una contraddizione implica materialmente un qualunque enunciato, in particolare l'enunciato falso)	$(P\wedge\neg P)\rightarrow Q$

In realtà, i paradossi dell'implicazione sono solo i primi due e nascono dal fatto che '*sequitur*' viene interpretato intuitivamente, ma se lo si intende formalmente sia come implicazione materiale, sia come deduzione, scompare ogni paradossalità. Si noti che se il *modus ponens* è la regola che permette di dedurre dalla verità dell'antecedente la verità del conseguente e quindi permette la deduzione, la legge dello Pseudo-Scoto consente la regola che permette di controllare se un sistema è contraddittorio. Se da un sistema è possibile dedurre sia un enunciato sia la sua negazione allora esso è contraddittorio. D'altro canto, non lo sarà se è possibile dedurre un enunciato, ma non la sua negazione.

8. *Leggi di Ockham* (riscoperte da De Morgan)

$$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$$
$$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$$

9. *Leggi dell'implicazione materiale*

$$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$$
$$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$$

10. *Sillogismo a catena* (sillogismo ipotetico; transitività dell'implicazione materiale)

$$((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R)$$

11. *Sillogismo disgiuntivo*

$$((P\vee Q)\wedge\neg P)\rightarrow Q$$
$$((P\vee Q)\wedge\neg Q)\rightarrow P$$

12. *Leggi della doppia implicazione materiale*

$$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$$
$$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))$$